**Практическая работа № 20,21**

# «Решение матричных игр»

**Цель работы:** Освоить методы решения задач из теории игр.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

- использовать численные методы исследования математических моделей;

знать:

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

**Цель:**Приобрести навыки поиска рациональных решений в условиях неопределенности вызванной конфликтом интересов.

**Теория**

В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых два или более разумных противника имеют конфликтующие цели. Само слово «игра» применяется для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например: футбол, карточная игра, шахматы. Эти ситуации принятия решений отличаются от рассмотренных ранее, где природа, хотя и могла находиться в различных состояниях, но не преследовала каких-либо целей и, следовательно, не рассматривалась в роли соперника.

В игре заинтересованные стороны называются *игроками*, каждый из которых имеет некоторое множество вариантов выбора (не меньше двух, иначе он фактически не участвует в игре, поскольку заранее известно, что он предпримет). В экономике модель поведения лиц в виде игры возникает, например, при попытке нескольких фирм завоевать наиболее выгодное место на конкурентном рынке, или, например, при желании нескольких лиц (кампаний) разделить некоторое количество продукта (ресурса, финансовых средств) между собой так, чтобы каждому досталось как можно больше. Игроками в конфликтных экономических ситуациях, моделируемых в виде игры, являются производственные и непроизводственные фирмы, банки, отдельные люди и другие экономические агенты. В военных приложениях модель игры используется, например, для наилучшего выбора средств (из имеющихся или потенциально возможных) поражения военных целей противника или защиты от его нападения.

Для игр характерна неопределенность результата. Причины или источники неопределенности относятся к трем группам:

1) Комбинаторные источники (шахматы);

2) Случайные факторы (игра в орлянку, кости, карточные игры, где случаен расклад);

3) Неопределенность имеет стратегическое происхождение: игрок не знает, какого рода образа действий придерживается его противник. Здесь неопределенность исходит от другого лица.

Далее мы будем рассматривать игровые модели конфликтов, в которых участвуют два противника, каждый из которых имеет конечное число вариантов выбора решений. С каждой парой решений связан платеж, который один из игроков выплачивает другому (т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Такие игры принято называть *конечными играми двух лиц с нулевой суммой.*

В игре принимают участие два игрока: A и B. В распоряжении каждого игрока имеется конечное множество вариантов выбора — *стратегий*. Пусть  — множество стратегий игрока A,  — множество стратегий игрока B. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. Т.е., когда игрок А выбирает стратегию  (свою i-ю стратегию), а игрок В — стратегию , то результатом такого выбора становится платеж . Поскольку стратегий конечное число, то платежи  образуют матрицу размерности n x m, называемую *матрицей платежей* (или *матрицей игры*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В.

Пусть два игрока А и В играют в игру, основанную на подбрасывании монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб (Г) или решку (Р). Если результаты двух подбрасываний монеты совпадают (т.е. ГГ или РР), то игрок А получает один доллар от игрока В. Иначе игрок А платит один доллар игроку В.

Для каждого из игроков возможны 2 варианта результатов: выпадения герба или решки, следовательно матрица платежей имеет размерность 2 х 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ВГ | ВР |
| АГ |  |  |
| АР |  |  |

Если результаты двух подбрасываний (т.е. подбрасываний монеты игроками А и В) совпадают, то платеж в 1 доллар получает игрок А. Будем строить матрицу игры, с точки зрения игрока А, т.е. его выигрыши оценивать как положительные, а проигрыши — как отрицательные (с точки зрения В все будет наоборот и мы вполне могли бы построить матрицы платежей, ориентируясь на его точку зрения).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ВГ | ВР |
| АГ | 1 |  |
| АР |  | 1 |

Если результаты подбрасывания различаются, то доллар получает В, значит платеж А равняется –1 доллар. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока B равносилен проигрышу игрока A и равен поэтому .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ВГ | ВР |
| АГ | 1 | –1 |
| АР | –1 | 1 |

Т.о., мы построили матрицу игры, описывающую заданную ситуацию. Предполагается, что матрица игры обоим игрокам известна.

Исход игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на выборе правильных стратегий игры, т.е. таких вариантов, при которых так платеж данному игроку будет наибольшим. Однако, в отличие от методов оптимизации, в теории игр игрок не может просто стремиться к максимуму, он вынужден считаться с действиями соперника. Существенно, что ни один из партнеров не знает, какую стратегию применит его противник. Таким образом, имеет место ситуация полной неопределенности, при которой теория вероятности также не может помочь игрокам в выборе решения.

Рассмотрим процесс принятия решений обеими сторонами, предполагая, что оба игрока будут действовать рационально. Если игрок А не знает, как поступит его противник, то, действуя наиболее целесообразно и не желая рисковать, он выберет такую стратегию, которая гарантирует ему наибольший из наименьших выигрышей при любой стратегии противника.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 |
| А1 | 2 | -3 | 4 |
| А2 | -3 | 4 | -5 |
| А3 | 4 | -5 | 6 |

Т.е., А предполагает, что В умен и будет вести себя так, чтобы доставить противнику набольшие неприятности. Тогда, при выборе 1-й стратегии, А может рассчитывать лишь на худший для себя результат –3. При выборе 2-й и 3-й стратегий он может рассчитывать на –5. Из всех возможных стратегий целесообразнее выбрать ту, что принесет максимальный возможный доход (минимальные возможные убытки, как в нашем случае). В нашем случае это стратегия 1.

Принято говорить, что при таком образе действий игрок А руководствуется *принципом максиминного выигрыша*. Этот выигрыш определяется формулой

.

Величина  называется *нижней ценой игры*, *максиминным выигрышем*, или сокращенно *максимином.* Это тот гарантированный минимум, который игрок А может себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за игрока В. Так как он заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш А в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения по каждому столбцу

.

Все эти максимумы хороши для А, но крайне неприятны для В. Поскольку противник также учитывает нашу разумность, то выбирает из этих вариантов наименьший



— больше этой суммы игрок В точно не потеряет. Величина  называется *верхней ценой игры,* иначе — «минимаксом».

Принцип осторожности, который определяет выбор партнерами стратегий, соответствующих максиминному выигрышу или минимаксному проигрышу, часто называют принципом минимакса, а стратегии, вытекающие из этого принципа, — *минимаксными стратегиями*. Можно доказать, что всегда , чем и объясняются названия "нижняя цена" и "верхняя цена".

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | αi |
| А1 | 2 | -3 | 4 | -3 |
| А2 | -3 | 4 | -5 | -5 |
| А3 | 4 | -5 | 6 | -5 |
| βj | 4 | 4 | 6 |  |

Матрица игры в общем виде

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | … | Вm | αi |
| А1 | a11 | a12 | … | a1m | α1 |
| А2 | a21 | a22 | … | a2m | α2 |
| … | … | … | … | … | … |
| An | an1 | an2 | … | anm | αm |
| βj | β1 | β2 | … | βn |  |

Нижняя цена игры α = – 3; верхняя цена игры β = 4. Наша максиминная стратегия есть А1; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее –3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий В1 и В2, применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию А2), противник может нас «наказать» за это, применив стратегию В3 и сведя наш выигрыш к — 5. Но если противник выберет стратегию B3, то мы в свою очередь можем выбрать A3 и он проиграет 6 и т.д. Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

α = β

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *ценой игры*, и обозначают γ.

Например, в игре, матрица которой приведена ниже, верхняя и нижняя цены игры оказываются равными: α = β = γ = 0.6.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой.* По аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 | αi |
| А1 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,3 | 0,3 |
| А2 | 0,8 | 0,4 | 0,3 | 0,7 | 0,3 |
| А3 | 0,7 | **0,6** | 0,8 | 0,9 | **0,6** |
| A4 | 0,7 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,2 |
| βj | 0,8 | **0,6** | 0,8 | 0,9 |  |

Для игр с седловой точкой решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например А) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (В) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным. Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

В этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Т.е. пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия».

Анализируя матрицу игры, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь этой стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

Для матричной игры n×m обозначим через  — смешанную стратегию игрока А, где  и . Через  обозначим смешанную стратегию игрока В, где и . Здесь  — вероятности использования игроком А в смешанной стратегии своих чистых стратегий . и  — вероятности использования игроком B в смешанной стратегии своих чистых стратегий .

Допустим, что смешанная стратегия игрока А складывается из стратегий  с вероятностями  (некоторые из значений вероятностей могут быть равны нулю). Оптимальная смешанная стратегия игрока В складывается из стратегий  с вероятностями . Условия игры определяются платежной матрицей  с элементами , ; . Если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию, а игрок B — чистую стратегию , то средний выигрыш игрока А (математическое ожидание выигрыша) составит

.

Игрок А стремится к тому, чтобы при любой стратегии игрока В его выигрыш был не меньше, чем цена игры γ, а сама цена игры была максимальной. Такое поведение игрока А описывается следующей задачей линейного программирования:

 (игрок А стремится максимизировать свой выигрыш)



Используя обозначения  и соотношение , получим . Отсюда





Эта задача *всегда* имеет решение , получив которое (например, с помощью надстройки Поиск решения MS Excel) можно найти цену игры  и оптимальные значения вероятностей  — оптимальную смешанную стратегию игрока А.

Обратите внимание на то, что матрица игры представлена в неравенствах в транспонированном виде.

Поведению игрока B соответствует двойственная задача линейного программирования:



(эквивалентно : игрок B стремится минимизировать свой средний проигрыш)



Здесь .

Если в исходной платежной матрице имеется хотя бы один неположительный элемент, то первым шагом в процедуре сведения игры к задаче линейного программирования должно быть ее преобразование к матрице, все элементы которой строго положительны. Для этого достаточно увеличить все элементы исходной матрицы на одно и то же число

, .

При таком преобразовании матрицы оптимальные стратегии игроков не изменятся. Если исходная матрица увеличивалась на , то для получения цены первоначальной игры, γ нужно уменьшить на .

**Порядок выполнения работы:**

1) Задание 1: решение игры с заданной матрицей платежей

1. Изучение теории.
2. Определение по заданной матрице платежей нижней и верхней цены игры. Существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
3. Сведение задачи теории матричных игр к задаче линейного программирования (ЛП)
4. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel (определение цены игры и оптимальной стратегии для каждого из игроков).

2) Задание 2: решение игры

1. Изучение примеров.
2. Построение матрицы платежей.
3. Сведение задачи теории матричных игр к задаче ЛП
4. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel и ответы на дополнительные вопросы задания.

3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором для каждого задания представляется:

* формулировка задания;
* снимки экрана монитора, содержащие матрицу игры, формулировку задачи ЛП, найденное решение (цену игры и оптимальные стратегии игроков) и ответы на дополнительные вопросы.

**Варианты заданий 1**

**Задача 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 8 | 6 | 2 | 8 |
| А2 | 8 | 9 | 4 | 5 |
| А3 | 7 | 5 | 3 | 5 |

**Задача 2**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 4 | -4 | -5 | 6 |
| А2 | -3 | -4 | -9 | -2 |
| А3 | 6 | 7 | -8 | -9 |
| А4 | 7 | 3 | -9 | 5 |

**Задача 3**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 1 | 9 | 6 | 0 |
| А2 | -2 | 3 | 8 | 4 |
| А3 | -5 | -2 | 10 | -3 |
| А4 | 7 | 4 | -2 | -5 |

**Задача 4**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | -1 | 9 | 6 | 8 |
| А2 | -2 | 10 | 4 | 6 |
| А3 | 5 | 3 | 0 | 7 |
| А4 | 7 | -2 | 8 | 4 |

**Задача 5**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | -0,8 |
| А2 | -0,8 | 0,9 | -0,4 | 0,5 |
| А3 | 1,7 | 0,5 | 0,3 | 0,6 |

**Задача 6**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 |
| А1 | 3 | 6 | 1 |
| А2 | 5 | 2 | 3 |
| А3 | 2 | 2 | -5 |

**Задача 7**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 3 | 7 | 1 | 3 |
| А2 | 4 | 8 | 0 | -6 |
| А3 | 6 | -9 | -2 | 4 |

**Задача 8**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 10 | 40 | 12 | 9 |
| А2 | 17 | 16 | 13 | 14 |
| А3 | 23 | 8 | 10 | 25 |

**Задача 9**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | -2 | 1 | 9 | -2 |
| А2 | -2 | 5 | 4 | 6 |
| А3 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| А4 | 7 | -2 | 8 | 4 |

**Задача 10**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | -3 | 2 | 9 | 6 |
| А2 | -2 | 5 | 4 | 6 |
| А3 | 5 | 3 | 1 | -5 |
| А4 | 8 | -2 | 8 | 4 |

**Задача 11**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | -8 | 6 | 0 | 7 |
| А2 | 3 | -1 | 4 | 4 |
| А3 | 5 | 4 | 3 | 4 |

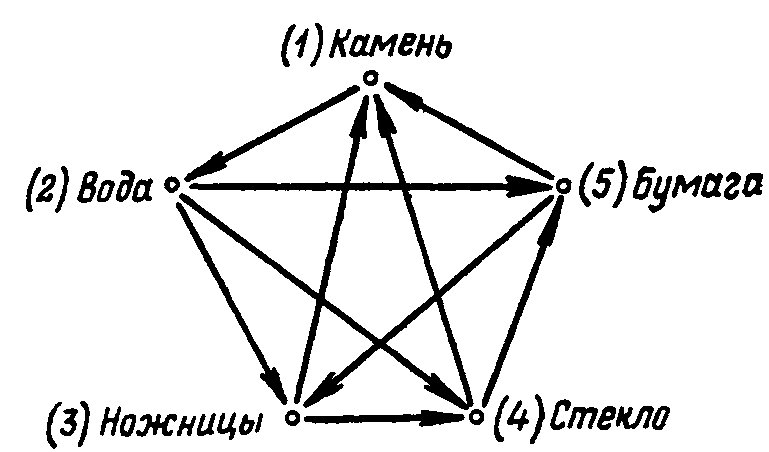
**Варианты заданий 2**

**Задача 1**

По условиям игры «Камень—вода—ножницы—стекло—бумага»:

* вода смачивает камень;
* бумага горит лучше воды;
* ножницы режут бумагу;
* камень разбивает ножницы;
* ножницы стоят дороже, чем вода;
* стекло более хрупкое, чем вода и ножницы;
* камень толще, чем стекло и бумага;
* бумага гибче, чем стекло.

Эти соотношения можно выразить с помощью следующего рисунка, на котором стрелками указаны направления подчинения:



Обозначив выигрыш, проигрыш и ничью соответственно как 1, –1 и 0, постройте платежную матрицу и определите оптимальные стратегии игроков и цену игры.

**Задача 2**

Известный актер обдумывает, где бы ему провести в текущем году отпуск. Он рассматривает 6 возможных вариантов: Монте-Карло (МК), Гавайские острова (Г), Багамские острова (Б), Канарские острова (К), Сочи (С), озеро Байкал (ОБ). Единственный критерий для выбора места отдыха — стремление избежать журналистов, которые могут испортить ему отдых. Если они его «выследят», отдых будет испорчен (полезность равна 0). В противном случае, все будет, как запланировано (полезность равна 1). Вследствие различных географических условий, журналисты могут обнаружить актера с определенной (известной) вероятностью: в Монте-Карло с вероятностью 0,34; на Гавайских островах с вероятностью 0,12; на Багамских островах с вероятностью 0,16; на Канарских островах с вероятностью 0,4; в Сочи с вероятностью 0,5; на озере Байкал с вероятностью 0,2.

Опишите данную ситуацию, как игру двух лиц с нулевой суммой (актер — игрок 1, журналисты — игрок 2).

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии обоих игроков. Чему равна максимальная ожидаемая полезность отпуска актера? С какой вероятностью актер поедет в отпуск на Байкал? Чему равна верхняя цена игры? В каком из мест наиболее вероятно будет отдыхать актер?

**Задача 3**

Однажды на «Диком Западе» произошел следующий случай. Группа из пяти индейцев осадила лагерь, охраняемый четырьмя белыми. У лагеря два входа Е1 и Е2. Белый разведчик установил, что перед входом Е1 находится как минимум один индеец, а перед входом Е2 как минимум два индейца. Расположение других индейцев неизвестно. Командир осажденных может расположить себя и трех солдат у входов Е1 и Е2. Причем, у каждого входа должен быть как минимум один человек. Предполагается, что численно превосходящая (у каждого входа) группа берет в плен всю группу противника без собственных потерь, в то время как при равенстве сил перед каким-либо входом потерь с обеих сторон нет. В качестве платежа (выигрыша) выступает разность числа пленных.

а) Определите все чистые стратегии обоих противников.

б) Постройте платежную матрицу, считая игроком 1 обороняющуюся сторону.

в) Упростите матрицу насколько это возможно и найдите оптимальные стратегии сторон.

г) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить по два человека у каждого входа?

д) кто больше в среднем захватит пленных, белые или индейцы? (1 - белые, 2 - индейцы)

е) какова абсолютная величина разности числа захваченных обеими сторонами пленных?

ж) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить у первого входа одного, а у второго трех человека?

з) с какой частотой следует индейцам использовать стратегию: расположить у первого входа трех, а у второго двух воинов?

**Задача 4**

В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A1, A2, А3; у противника — три вида самолетов: B1, В2, В3. Наша задача — поразить самолет; задача противника— сохранить его непораженным. Самолеты В1, В2 и В3 поражаются при использовании вооружения А1 соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при использовании А2 — с вероятностями 0,3, 0,6 и 0,8; при использовании А3 — с вероятностями 0,5, 0,7 и 0,2.

**Задача 5**

Сельскохозяйственное предприятие производит картофель. Посевная площадь картофеля составляет 100 га. Хозяйство имеет договор с магазином, который гарантированно закупит весь произведённый картофель по цене 4 у.д.е. за 1 кг. При выращивании картофеля хозяйство может принять одно из трёх решений, различающихся по сумме затрат на производство продукции:

A1. Провести комплексную обработку растений для предотвращения поражения сорняками, вредителями и болезнями (затраты — 6 млн. у.д.е.).

A2. Провести частичную обработку растений (затраты — 4 млн. у.д.е.).

A3. Не проводить обработку растений (затраты — 2.5 млн. у.д.е.).

В зависимости от погодных условий, наличия и развития сорняков, вредителей и болезней возможны следующие ситуации:

S1. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней неблагоприятные.

S2. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней обычные.

S3. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней благоприятные.

Значения урожайности картофеля (ц/га) в зависимости от решений сельскохозяйственного предприятия и развития сорняков, вредителей и болезней приведены в таблице

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Стратегии хозяйства | Развитие сорняков, вредителей и болезней | | |
|  | S1 | S2 | S3 |
| A1 | 260 | 260 | 260 |
| A2 | 255 | 200 | 1450 |
| A3 | 250 | 100 | 40 |

Определите наиболее оптимальную стратегию предприятия и цену игры. Дайте экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

**Задача 6**

Сторона В засылает подводную лодку в один из двух районов. Сторона A, располагая тремя противолодочными кораблями, стремится обнаружить лодку противника. Сторона В стремится этого избежать. Вероятность обнаружения подводной лодки в 1-м районе одним противолодочным кораблем равна p1 = 0,4, во втором — p2 = 0,6.

Предполагается, что обнаружение лодки каждым кораблем является независимым событием. Сторона А может посылать в различные районы разное количество кораблей (распределение кораблей по районам и есть ее стратегия).

Считая сторону А игроком 1, построить игру и найти оптимальное распределение противолодочных кораблей по регионам.

Какова цена игры? С какой частотой стороне А следует посылать в регион 2 три противолодочных корабля? С какой частотой стороне А следует посылать в регион 1 один противолодочный корабль? С какой частотой стороне В следует посылать подлодку в регион 2?

**Задача7**

В одном сельскохозяйственном районе погода в течение вегетационного периода в среднем может быть холодной или теплой. На ферме с площадью в 1500 акров планируется посев двух культур. Если вегетационный период холодный, то ожидаемая прибыль от урожая составляет 20 долларов на акр для культуры I и 10 долларов на акр для культуры II. Если же вегетационный период теплый, то ожидаемая прибыль оценивается в 10 долларов за акр для культуры I и 30 долларов за акр для культуры II.

Опишите конкуренцию между фермером и погодой как матричную игру.

Какова оптимальная стратегия фермера, когда нет никакой информации относительно вероятностей теплой или холодной погоды? Если погода с равной вероятностью может быть теплой или холодной, то сколько акров следует отвести фермеру под каждую культуру?

**Задача 8**

В экспериментах ворон и попугайчиков обучают распознаванию чисел до семи. Используется следующая схема эксперимента. Рацион вороны R и попугайчика С должен определяться матричной игрой. Каждой птице показывают три карточки с нанесенными на них двумя, четырьмя и семью точками. Если обе птицы выбирают одну и ту же карточку, то R получает из рациона С количество червяков, равное удвоенному числу точек на карточке. Если они выбирают разные карточки, то С получает из рациона R количество червей, равное разнице в числе точек на карточках.

В предположении, что ходы делаются независимо (например, с помощью двух наборов карточек), требуется описать этот эксперимент как матричную игру. Найти оптимальные чистые стратегии игроков. Чьи шансы на выигрыш предпочтительнее в случае чистых стратегий? Найти оптимальные смешанные стратегии. Чьи шансы предпочтительнее в этом случае?

**Задача 9**

В игре двух лиц, именуемой двухпальцевой игрой Морра, каждый игрок показывает один или два пальца и одновременно отгадывает число пальцев, которые покажет его противник. Игрок, который угадал, выигрывает сумму, равную суммарному числу показанных противниками пальцев. Иначе игра заканчивается вничью.

Сформулируйте задачу в виде игры двух лиц с нулевой суммой и решите игру методами линейного программирования. Существует ли в данной игре седловая точка в чистых стратегиях? Кто из игроков в среднем выигрывает и сколько? Как часто игрок А должен говорить, что его противник показал два пальца?

**Задача 10**

Джек часто ездит между двумя городами. При этом есть возможность выбрать один из двух маршрутов: маршрут А представляет собой скоростное шоссе в четыре полосы, маршрут В — узкую объездную дорогу.

Патрулирование дорог осуществляется ограниченным числом полицейских. Если все полицейские расположены на одном маршруте, то Джек, обычно едущий «на грани фола», несомненно, получит штраф в 100 долл. за превышение скорости. Если полицейские патрулируют на двух маршрутах в соотношении 50 на 50, то имеется 50 % -ная вероятность, что Джек получит штраф в 100 долл. на маршруте А и 30 %-ная вероятность, что он получит такой же штраф на маршруте В. Кроме того, маршрут В длиннее, поэтому бензина расходуется на 15 долл. больше, чем на маршруте А. Определите наилучшую стратегию для Джека.

**Задача 11**

В магазине работает охранная служба — двое полицейских в штатском. Торговый зал магазина делится на две условные зоны — в зоне А почти всегда посетителей значительно больше, чем в зоне В. Имеется некоторая позиция Т вне торговой площади, в T установлена телекамера. В каждой из двух условных зон может находиться вор. Полицейские же могут находиться в А, в В или в Т. Предполагается, что известны вероятности обнаружения вора в определенной зоне при условии, что полицейский находится в фиксированном месте. Так, вора, находящегося в А, полицейский на том же месте заметит с вероятностью 0.4; из зоны Т он заметит его в зоне А с вероятностью 0.3; и т.д. в соответствии с таблицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | T | A | B |
| A | 0.3 | 0.4 | 0.1 |
| B | 0.5 | 0.2 | 0.7 |

Так как полицейских двое, то они могут находиться вместе или в разных местах.

Для каждой из ситуаций необходимо подсчитать вероятность обнаружения вора в каждой зоне и построить на ее основе матрицу игры (название строки — место вора, столбца — охраны). Определить, существует ли в игре седловая точка. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

**Контрольные вопросы**

1. Предмет и задачи теории игр

2. Методы решения конечных игр.

3.Антогонистические матричные игры.